第３講　回転に関わる問題（力学）

1（解答用紙１）

図１のように，無重力の宇宙空間に半径 R の巨大な円筒形の密閉容器(宇宙ステーション)が浮かんでいる。この内壁上で地球上と同じような生活を実現させるために，宇宙ステーションを円筒の中心軸の回りに一定の角速度 ω で回転させ，重力に相当する力を人工的に作り出す。円筒の内壁上には観測者Ｓ，円筒の外には静止している観測者Ｔがいるとして，以下の設問に答えよ。なおここでは図１に描かれた面内で起こる運動のみを考える。また，観測者Ｓから見て内壁に沿う図１中の矢印の方向を $+x$ 方向とせよ。

Ⅰ　円筒の内壁上に立っている観測者Ｓがバネを持ち，物体Ａをつり下げるとバネは L だけ伸びた。

(1)　観測者Ｓがそのまま内壁に対して一定の速さ v (>0) で $+x$ 方向に運動したとき，バネの伸びはいくらになるか。

(2)　観測者Ｓが物体Ａをつるしたバネを持ち，内壁に垂直に立てたはしご(図１)を $\frac{R}{2}$ の高さまで登ったときのバネの伸びはいくらか。

(3)　地球上で同じバネに同じ物体Ａをつるすと，バネは同じく L だけ伸びた。宇宙ステーションの角速度 ω を地球上の重力加速度 g を用いて表せ。

Ⅱ　円筒の内壁に固定され回転の中心Ｏに向いている打ち上げ装置(図１)を使い，ボールを打ち上げ装置に対して速さ u で打ち上げた。

(1)　観測者Ｔが見るとこのボールはどのような運動をするか。理由をつけて答えよ。また，観測者Ｔから見たボールの初速度の大きさを ω，R，u で表せ。

(2)　このボールが打ち上げられてから宇宙ステーションの内壁に衝突するまでの時間 t_1 を求めよ。

(3)　打ち上げ装置から見て，このボールは内壁上のどの地点に落下するか。「同じ場所」，「$+x$ 方向に離れた場所」，「$-x$ 方向に離れた場所」「これだけではわからない」の中から選び，そう判断した理由を述べよ。

< Note >

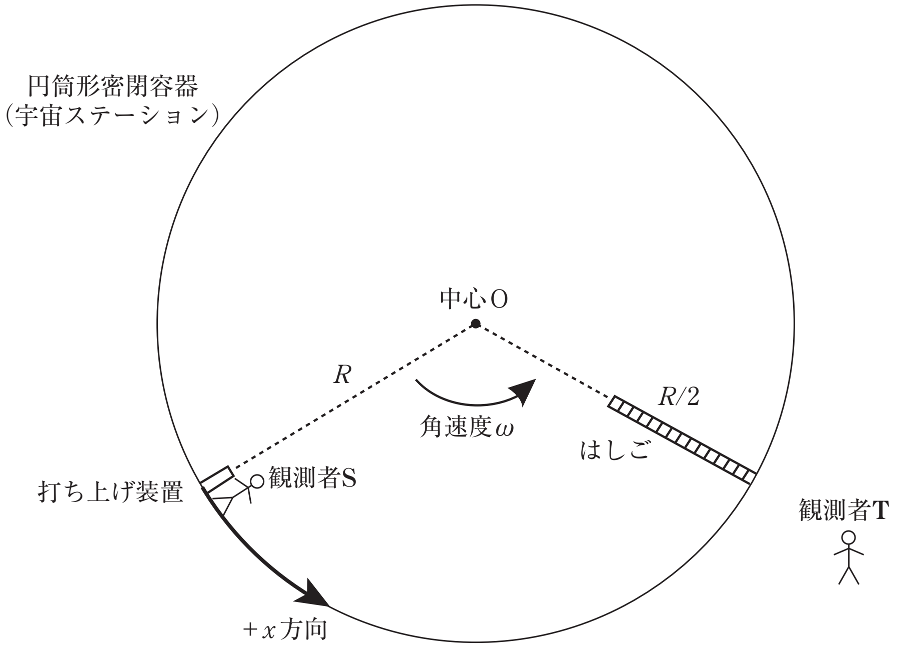

図１
（実際の観測者や打ち上げ装置の大きさは，半径Rにくらべて十分に小さい。）

＜ Note ＞

2 （解答用紙１）

長さ L の不透明な細いパイプの中に，質量 m の小球１と質量 $2m$ の小球２が埋め込まれている。パイプは直線状で曲がらず，その口径，及び小球以外の部分の質量は無視できるほど小さい。また小球は質点と見なしてよいとし，重力加速度を g とする。これらの小球の位置を調べるために次の二つの実験を行った。

Ⅰ　まず，図１に示したように，パイプの両端Ａ，Ｂを支点ａ，ｂで水平に支え，両方の支点を近づけるような力をゆっくりとかけていったところ，まずｂがＣの位置まで滑って止まり，その直後に今度はａが滑り出してＤの位置で止まった。パイプと支点の間の静止摩擦係数，及び動摩擦係数をそれぞれ μ，μ'（ただし $\mu>\mu'$）と記すことにして，以下の問に答えよ。

⑴　ｂがＣで止まる直前に支点ａ，ｂにかかっているパイプに垂直な方向の力をそれぞれ N_{a}，N_{b} とする。このときのパイプに沿った方向の力のつり合いを表す式を書け。

⑵　ACの長さを測定したところ d_1 であった。パイプの重心が左端Ａから測って l の位置にあるとするとき，重心の周りの力のモーメントのつり合いを考えることにより，d_1 を l，μ，μ' を用いて表せ。

⑶　CDの長さを測定したところ d_2 であった。摩擦係数の比 μ'/μ を d_1，d_2 で表せ。

⑷　上記の測定から重心の位置 l を求めることができる。l を d_1，d_2 で表せ。

⑸　さらに両方の支点を近づけるプロセスを続けると，どのような現象が起こり，最終的にどのような状態に行き着くか。理由も含めて簡潔に述べよ。

Ⅱ　次に，パイプの端Ａに小さな穴を開け，図２のようにそこを支点として鉛直に立てた状態から静かにはなし，パイプを回転させた。パイプが180°回転したときの端Ｂの速度の大きさを測ったところ，v であった。端Ａから測った小球１，２の位置をそれぞれ l_1，l_2 として以下の問に答えよ。（支点での摩擦および空気抵抗は無視できるものとする。）

⑴　v を l_1，l_2，g，L を用いて表せ。

⑵　v を実験Ⅰで得られた重心の位置 l の値を用いて表したところ，

$$v=L\sqrt{\frac{8g}{3l}}$$

であった。小球の位置 l_1，l_2 を l で表せ。ただし $l_1\neq0$，$l_2\neq0$ とする。

< Note >

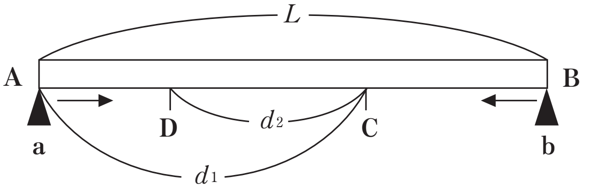

図１

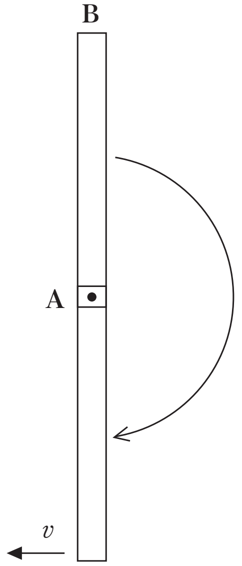

図２

＜ Note ＞

第３講　確認テスト

（解答用紙１）

図１のように，直線と半径 r の円弧とからなる軌道を考える。円弧は点C，E，F で軌道の直線部分と滑らかにつながっている。初速度０で点 A から質量 m の球が斜面に沿ってすべり落ちるとき，球は軌道に沿って摩擦なしで運動する。点B，F，H は水平線上にあり，直線部分 AB は水平線と角度 α をなす。重力加速度を g とし, 球の半径は十分小さいとする。

Ⅰ　この球が軌道から受ける最大の抗力を求めよ。

Ⅱ　出発点 A での球の高さ h がある値 h_0 をこえると，球が運動の途中で軌道から浮き上がる。h_0 を求めよ。

Ⅲ　$h > h_0$ のとき, 球が軌道から飛び上がり, 点 H に落下した。このときの h の値を求めよ。

Ⅳ　高さ h を適当に選んで，球が軌道から浮き上がらずに点 G に到達するためには，角度 α がある条件を満たすことが必要である。この条件を求めよ。

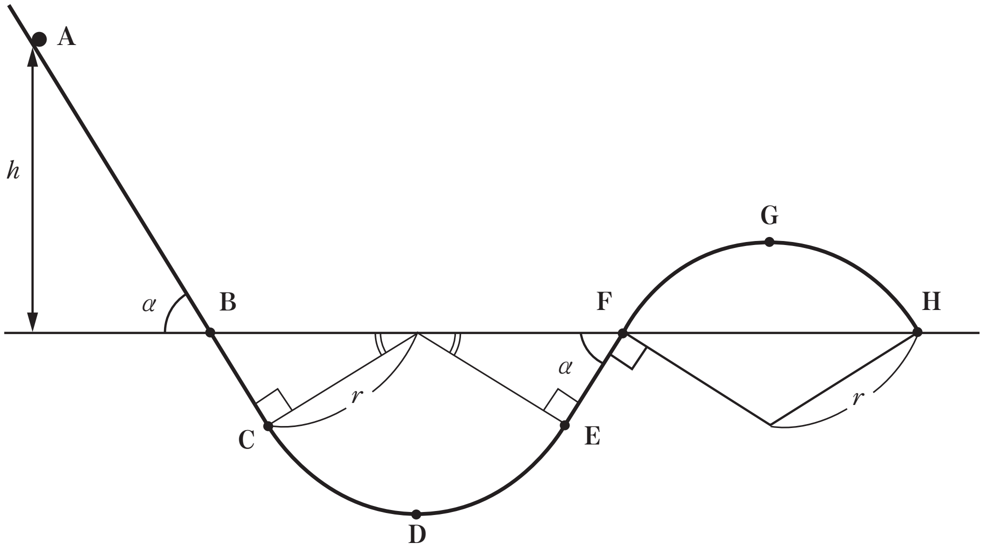

図１

＜ Note ＞

第３講　解答

1

Ⅰ　(1)　$\left(1+\dfrac{v}{R\omega}\right)^2 L$

(2)　$\dfrac{1}{2}L$

(3)　$\sqrt{\dfrac{g}{R}}$

Ⅱ　(1)　運動：等速度運動(理由は略)　　初速度の大きさ：$\sqrt{u^2+(R\omega)^2}$

(2)　$\dfrac{2Ru}{u^2+(R\omega)^2}$

(3)　$+x$ 方向に離れた場所(理由は略)

2

Ⅰ　(1)　$\mu N_{\mathrm{a}}=\mu' N_{\mathrm{b}}$

(2)　$l\left(1+\dfrac{\mu'}{\mu}\right)$

(3)　$\dfrac{d_2}{d_1}$

(4)　$\dfrac{{d_1}^2}{d_1+d_2}$

(5)　略

Ⅱ　(1)　$2L\sqrt{\dfrac{g(l_1+2l_2)}{{l_1}^2+2{l_2}^2}}$

(2)　$l_1=2l$　　$l_2=\dfrac{1}{2}l$

第３講　確認テスト

【解答】

Ⅰ　$mg\left(3+\dfrac{2h}{r}\right)$

Ⅱ　$h_0=\dfrac{1}{2}r\cos\alpha$

Ⅲ　$h=\dfrac{r}{2\cos\alpha}$

Ⅳ　$\cos\alpha>\dfrac{2}{3}$

【解説】

Ⅰ

抗力は点Ｄにおいて最大となる。球の，点Ｄにおける速さを v_D，抗力を N_D として，

$$\begin{cases} \text{円運動の方程式} & m\dfrac{v_D{}^2}{r}=N_D-mg \quad \cdots ① \\ \text{エネルギー保存則} & \dfrac{1}{2}mv_D{}^2=mg(h+r) \quad \cdots ② \end{cases}$$

①②より，$\underline{N_D=mg\left(3+\dfrac{2h}{r}\right)}$

Ⅱ

抗力は点Ｆにおいて最小となる。球の，点Ｆにおける速さを v_F，抗力を N_F として，

$$\begin{cases} \text{円運動の方程式} & m\dfrac{v_F{}^2}{r}=mg\cos\alpha-N_F \quad \cdots ③ \\ \text{エネルギー保存則} & \dfrac{1}{2}mv_F{}^2=mgh \quad \cdots ④ \end{cases}$$

③④より，$N_F=mg\left(\cos\alpha-\dfrac{2h}{r}\right)$

$h=h_0$ で $N_F=0$　　$\therefore$　$\underline{h_0=\dfrac{1}{2}r\cos\alpha}$

Ⅲ

点Ｆで飛び出た球の軌跡の放物線の頂点Ｓが，点Ｇの真上となればよい。

ＦからＳへかかる時間を t として，

$$\begin{cases} 0=v_F\sin\alpha-gt \\ r\sin\alpha=v_F\cos\alpha\cdot t \end{cases}$$

より，$v_F{}^2\cos\alpha=gr$　$\cdots ⑤$

④と⑤より，$\underline{h=\dfrac{r}{2\cos\alpha}}$

Ⅳ

$$\begin{cases} \text{点Ｆで浮き上がらない条件は} & h\leqq\dfrac{1}{2}r\cos\alpha \\ \text{点Ｇに達するための，エネルギーについての条件は} & h>r(1-\cos\alpha) \end{cases}$$

これらをみたす h が存在する条件は

$r(1-\cos\alpha)<\dfrac{1}{2}r\cos\alpha$　　$\therefore$　$\underline{\cos\alpha>\dfrac{2}{3}}$